주파수 안정도

2003. 6. 10 12

김 영 범
(5146,*kimy@kriss.re.kr*)

한국표준과학연구원
KOREA RESEARCH INSTITUTE OF STANDARDS AND SCIENCE

발표내용

1. 주파수란 ?

2. 주파수의 정밀측정기술

3. 주파수의 품질표현
    - 주파수 정확도
    - 주파수 안정도

4. 주파수 안정도의 변환

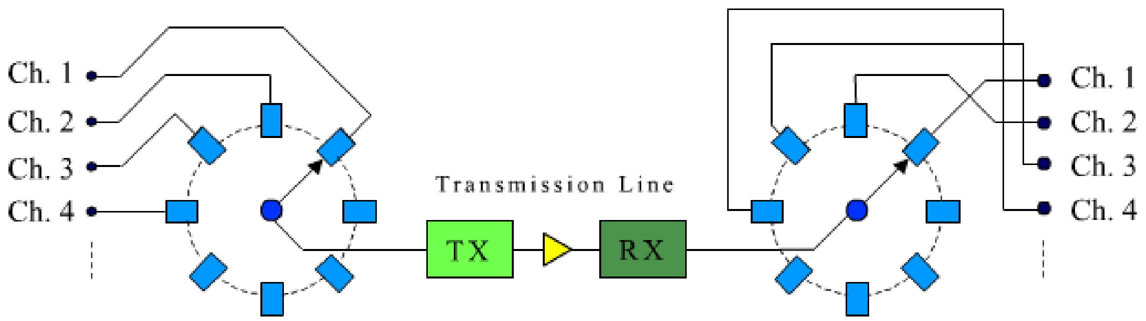
주파수(Frequency)란 ?

1. 의미 : 초당 규칙적인 사건의 반복횟수
   - 표기법 : Hertz, Cycle, bps(bit per second)
   - 단위 : [Hz]
   - 주기(period) = 1 / 주파수

2. 역할
   - 어떤 장치의 제어를 담당하는 신호

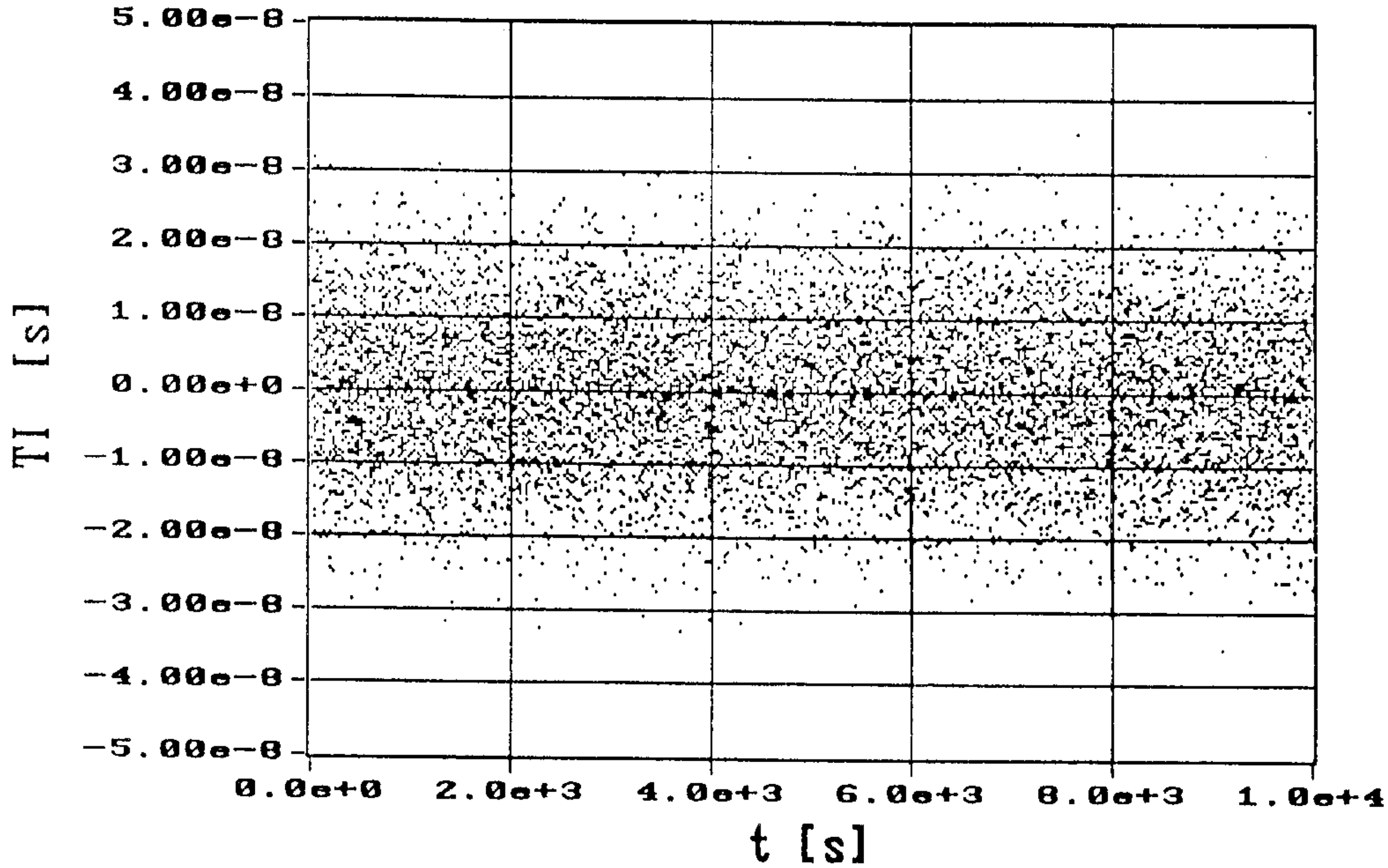
3. 정밀 주파수원의 사용분야
   - 통신, 측지, 우주항공, 전파천문, 방송, 전력,

시분할방식에 의한 통신



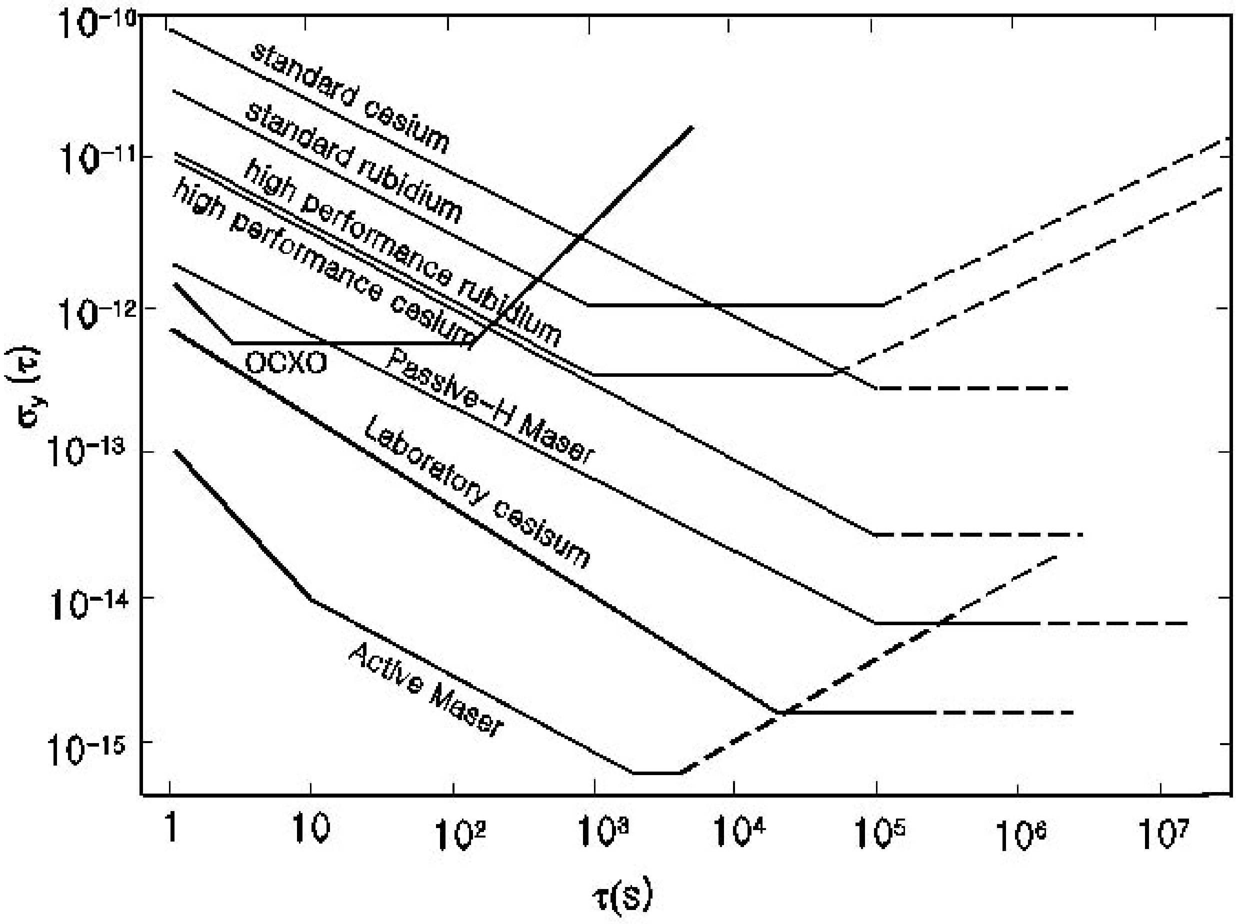
불확실한 동기의 영향

신호의 위상잡음



5.00e-8
4.00e-8
3.00e-8
2.00e-8
1.00e-8
0.00e+0
-1.00e-8
-2.00e-8
-3.00e-8
-4.00e-8
-5.00e-8
TI [s]
0.0e+0
2.0e+3
4.0e+3
6.0e+3
8.0e+3
1.0e+4
t [s]

발진기들의 주파수안정도 특성



주파수의 정밀측정기술

1. Oscilloscope에 의한 측정
   - 리사쥬 도형 (Lissajous figure)
   - 도형편기(Pattern drift)

2. 위상비교 기록기(Phase recorder)에 의한 측정

3. 전자계수기(Electronic counter)에 의한 측정
   - 주파수측정법, 주기측정법
   - 시간간격 측정법
   - 비트주파수법, DMTD법

4. 스펙트럼분석기에 의한 측정

주파수의 품질표현

1. 정확도(Accuracy)
   - 상대주파수 변동(Relative Frequency)

2. 안정도(Stability)
   - 장기안정도(long-term stability)
     - Drift의 정도를 표현
   - 단기안정도(short-term stability)
     - Allan variance(AVAR)
     - Modified Allan variance
     - TIE(Time Interval Error)
     - MTIE, TVAR(TDEV)
     - Noise, Jitter의 표현에 적합

주파수의 정확도(1/2)

- 일반적인 정현파 발진기

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)]\sin[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$$

여기서 V_0 : 명목최대 전압진폭

$\varepsilon(t)$: 명목으로부터 진폭의 벗어남

ν_0 : 명목주파수

$\phi(t)$: 명목으로부터 위상의 벗어남

- 각주파수(angular frequency)

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$$

$$\nu_t = \nu_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi}{dt}$$

주파수의 정확도(2/2)

- 정확도(Accuracy)
  - 상대주파수변동(Relative Frequency)
  - Frequency Offset
  - 무 차원(Dimensionless)의 양

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

여기서

$x(t) = \phi(t) / 2\pi\nu_0$: 시간의 양으로 표현한 발진기의 위상

주파수의 안정도

- 장기안정도(long-term stability)
  - 시간의 흐름에 따른 정확도의 변동
  - Drift, Aging

$$K = y_2 - y_1 / period$$

- 단기안정도(short-term stability)
  - 주파수 영역(frequency domain)
  - 시간영역(time domain)

단기주파수의 안정도(1/4)

- 주파수 영역(frequency domain)
  - measure the spectral density of y_t

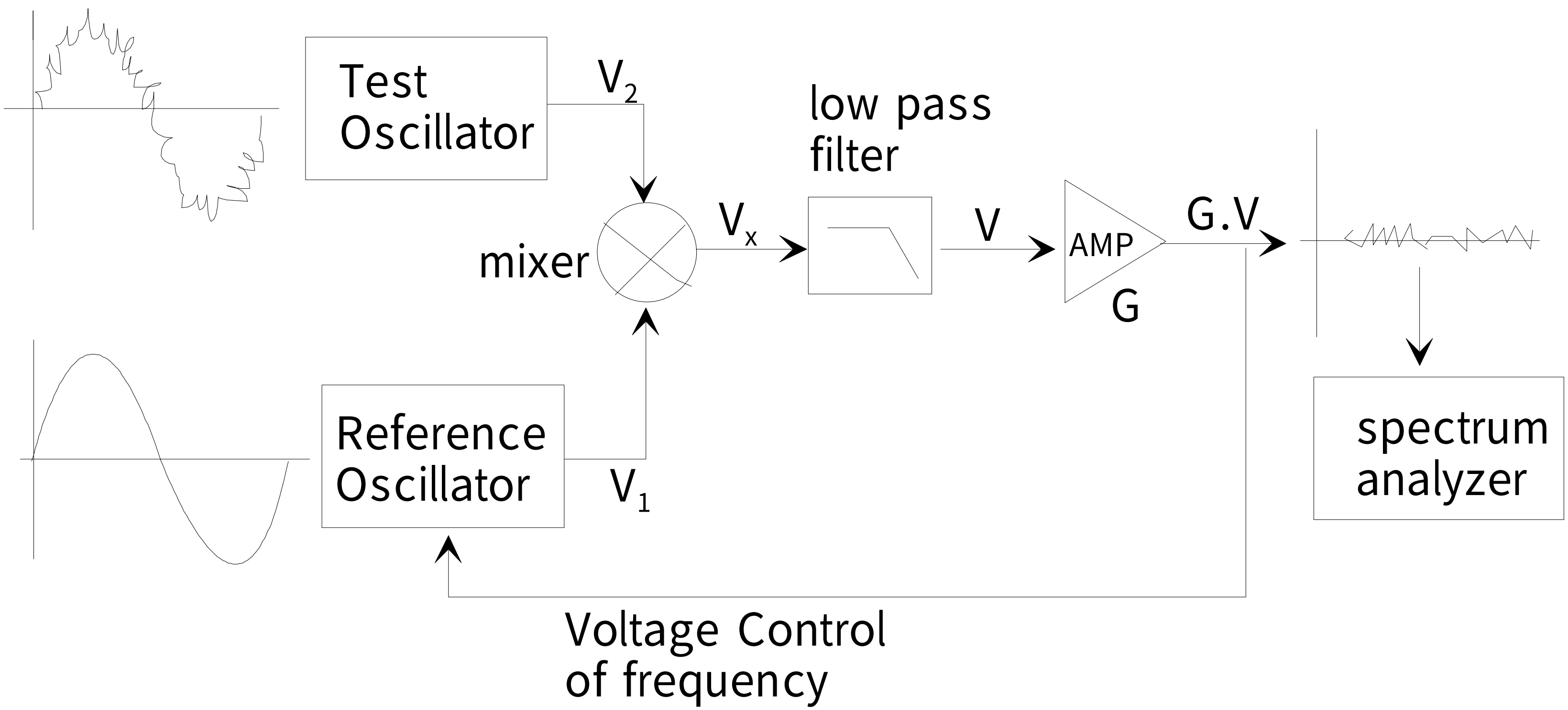
- y_t 의 스펙트럼 밀도 [Hz^{-1}]

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\phi(f)$$

- 위상변동의 스펙트럼 밀도

$$S_\phi(f) = \left(\frac{2}{A_{pp}}\right)^2 \frac{\{V_{rms}(f)\}^2}{B} \frac{1}{G^2}$$

위상변동의 스펙트럼밀도 측정



단기주파수의 안정도(2/4)

- 시간영역(time domain)
  - 규격화 주파수변동의 sample variance
  - Allan variance(AVAR) - 주파수측정

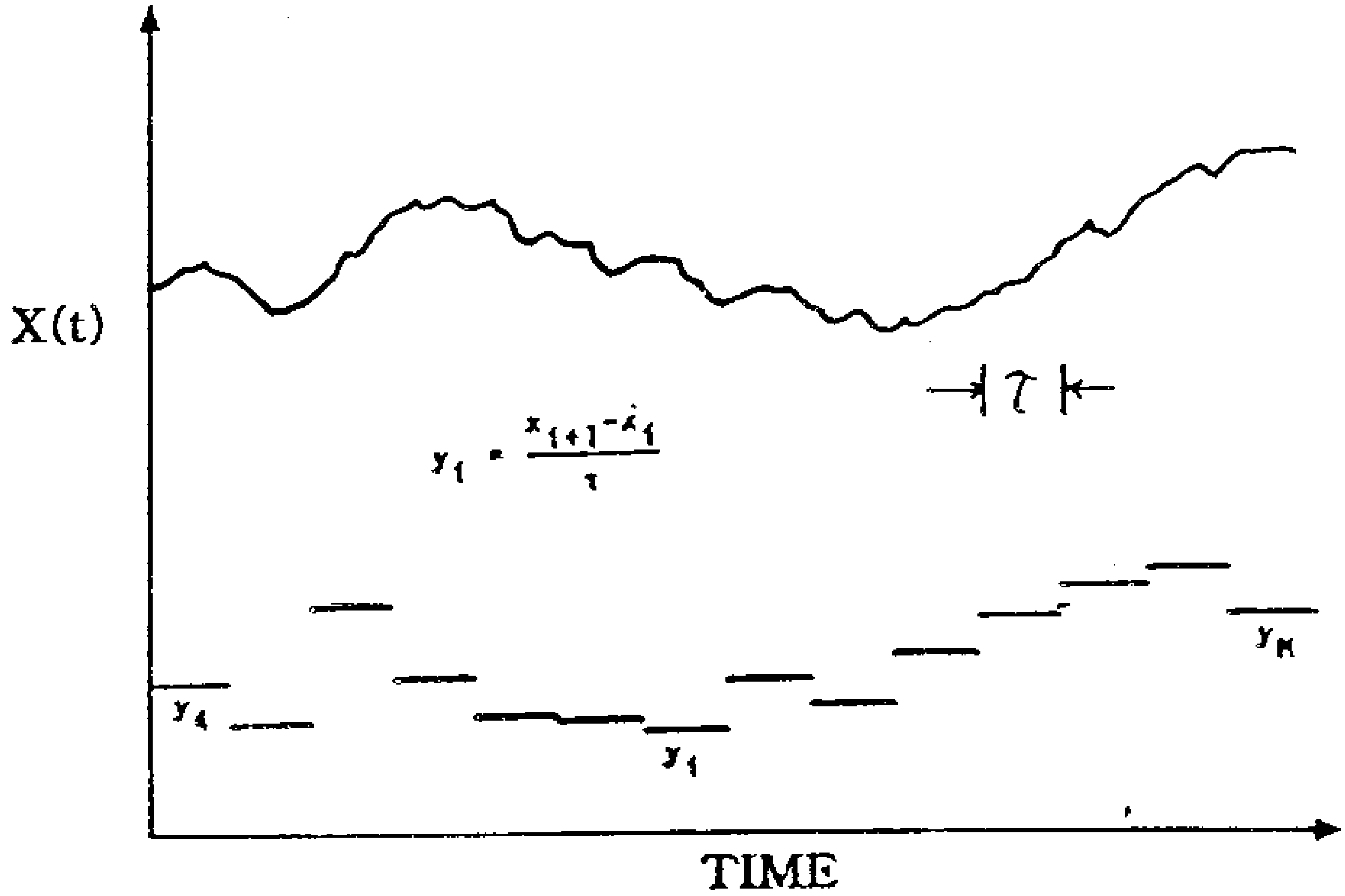
$$<\sigma_y{}^2(N,T,\tau)>\equiv<\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\bar{y}_n-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\bar{y}_k)^2>$$

$$\sigma_y{}^2(\tau)\equiv<\sigma_y{}^2(N=2,T=\tau,\tau)>$$

$$=<\frac{(\bar{y}_{k+1}-\bar{y}_k)^2}{2}>$$

$$\cong\frac{1}{2(M-1)}\sum_{k=1}^{M-1}(\bar{y}_{k+1}-\bar{y}_k)^2$$

Simulation of Time Fluctuation



Allan Variance 계산

	측정값 (Hz)	$\overline{\Delta f}$	$\overline{y}_k$	$\overline{y}_{k+1} - \overline{y}_k$	$(\overline{y}_{k+1} - \overline{y}_k)^2$
1	10,000,001	**1**	**1×10^{-7}**	**-2×10^{-7}**	**4×10^{-14}**
2	9,999,999	**-1**	**-1×10^{-7}**	**3×10^{-7}**	**9×10^{-14}**
3	10,000,002	**2**	**2×10^{-7}**	**-4×10^{-7}**	**16×10^{-14}**
4	9,999,998	**-2**	**-2×10^{-7}**	**2×10^{-7}**	**4×10^{-14}**
5	10,000,000	**0**	**0**	**-1×10^{-7}**	**1×10^{-14}**
6	9,999,999	**-1**	**-1×10^{-7}**	**2×10^{-7}**	**4×10^{-14}**
7	10,000,001	**1**	**1×10^{-7}**	**1×10^{-7}**	**1×10^{-14}**
8	10,000,002	**2**	**2×10^{-7}**	**-4×10^{-7}**	**16×10^{-14}**
9	9,999,998	**-2**	**-2×10^{-7}**	**2×10^{-7}**	**4×10^{-14}**
10	10,000,000	**0**	**0**		
합계					**59×10^{-14}**

단기주파수의 안정도(3/4)

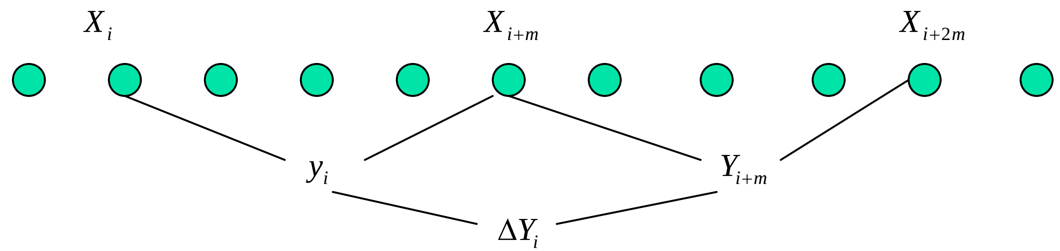
$$\sigma_y^{\,2}(\tau) = \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle$$: Two-sample variance

$$\sigma_y^{\,2}(\tau) = \left\langle \frac{1}{2}\tau^{-2}[X(t_k + 2\tau) - 2X(t_k + \tau) + X(t_k)]^2 \right\rangle \qquad (\because \bar{y}_k = \frac{X(t_k+\tau) - X(t_k)}{\tau})$$

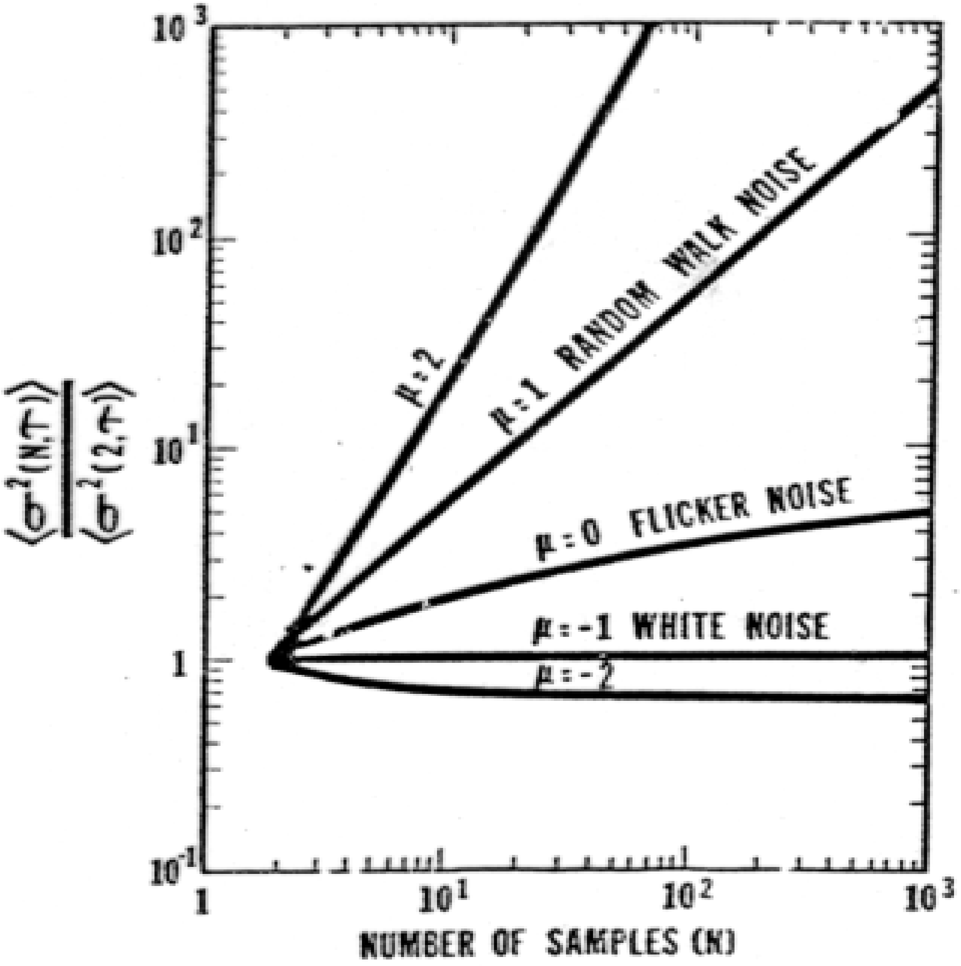
$$\cong \frac{1}{2(N-2)\tau^2}\sum_{i=1}^{N-2}(X_{i+2} - 2X_{i+1} + X_i)^2$$

$\tau = m\tau_0$ 로 놓으면 AVAR,

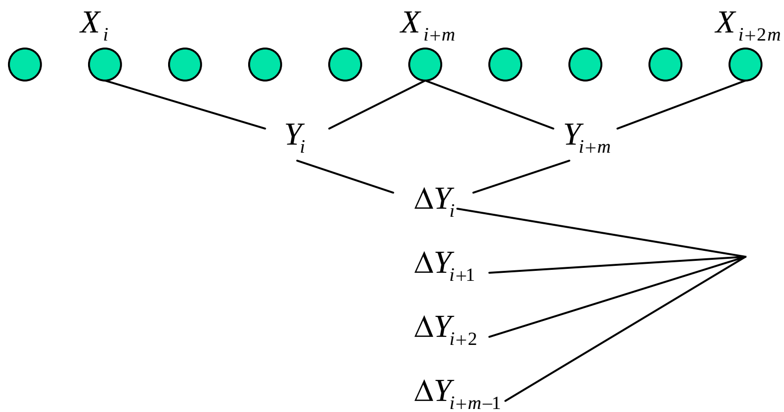
$$\sigma_y^{\,2}(m\tau_0) = \frac{1}{2(N-2m)m^2\tau_0^{\,2}}\sum_{i=1}^{N-2m}(X_{i+2m} - 2X_{i+m} + X_i)^2$$



N 샘플과 2샘플 분산의 비교



단기주파수의 안정도(4/4)



MVAR=Modified $\sigma_y^{\,2}(m\tau_0)$

$$= \frac{1}{2(N-3m+1)(m\tau_0)^2} \sum_{j=0}^{N-3m} [\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Delta Y_i]^2$$

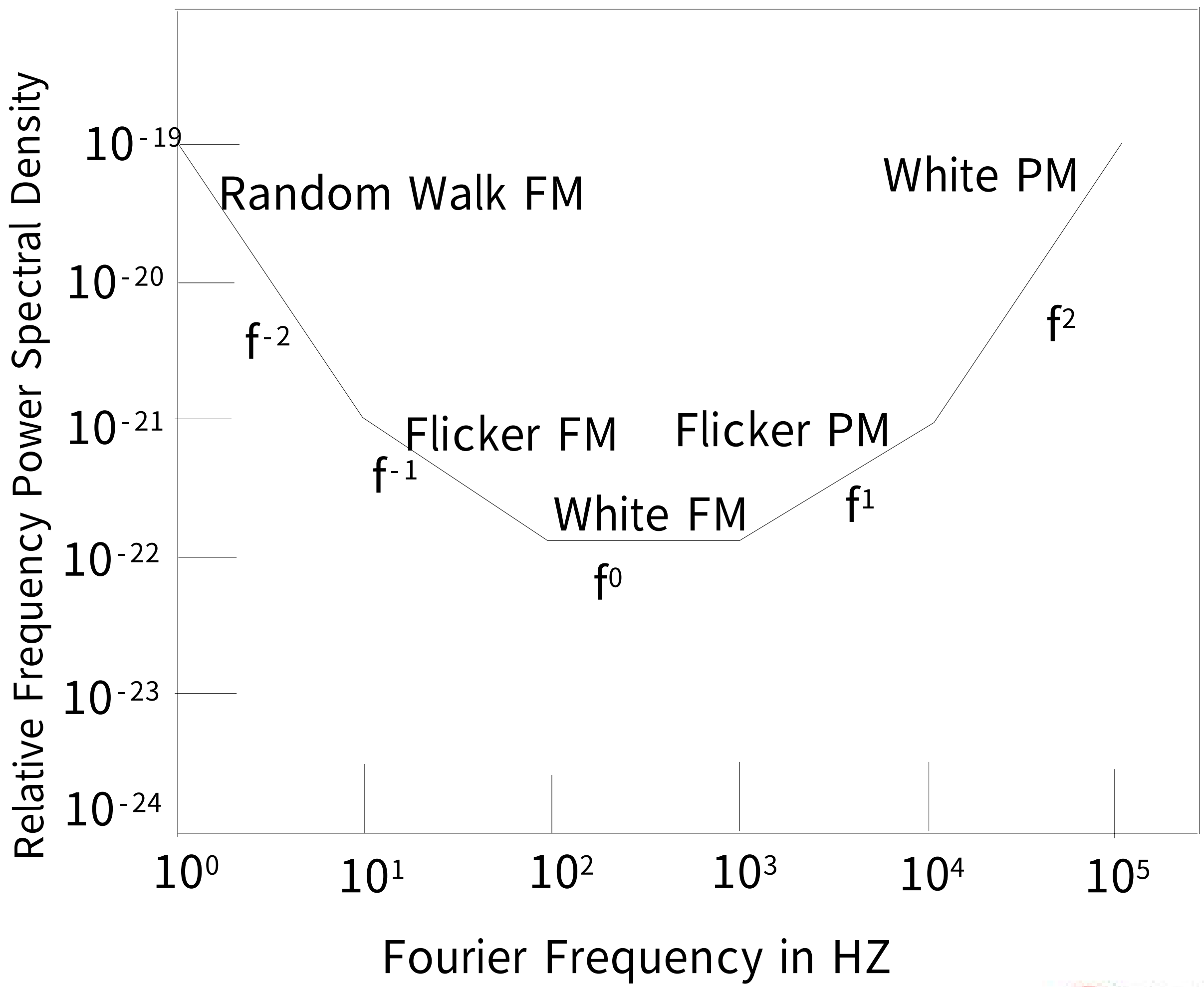
τ_0 : Sample Period[s], $\tau = m\tau_0$: Observation Time, $X_i = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N\}$

$$\text{MVAR} = \frac{1}{2(N-3m+1)(m\tau_0)^2} \sum_{j=0}^{N-3m} [\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{i+2m+j} - 2X_{i+m+j} + X_{i+j}]^2$$

$$= \frac{1}{2m^2(N-3m+1)(m\tau_0)^2} \sum_{j=0}^{N-3m} [\sum_{i=1}^{m} X_{i+2m+j} - 2X_{i+m+j} + X_{i+j}]^2$$

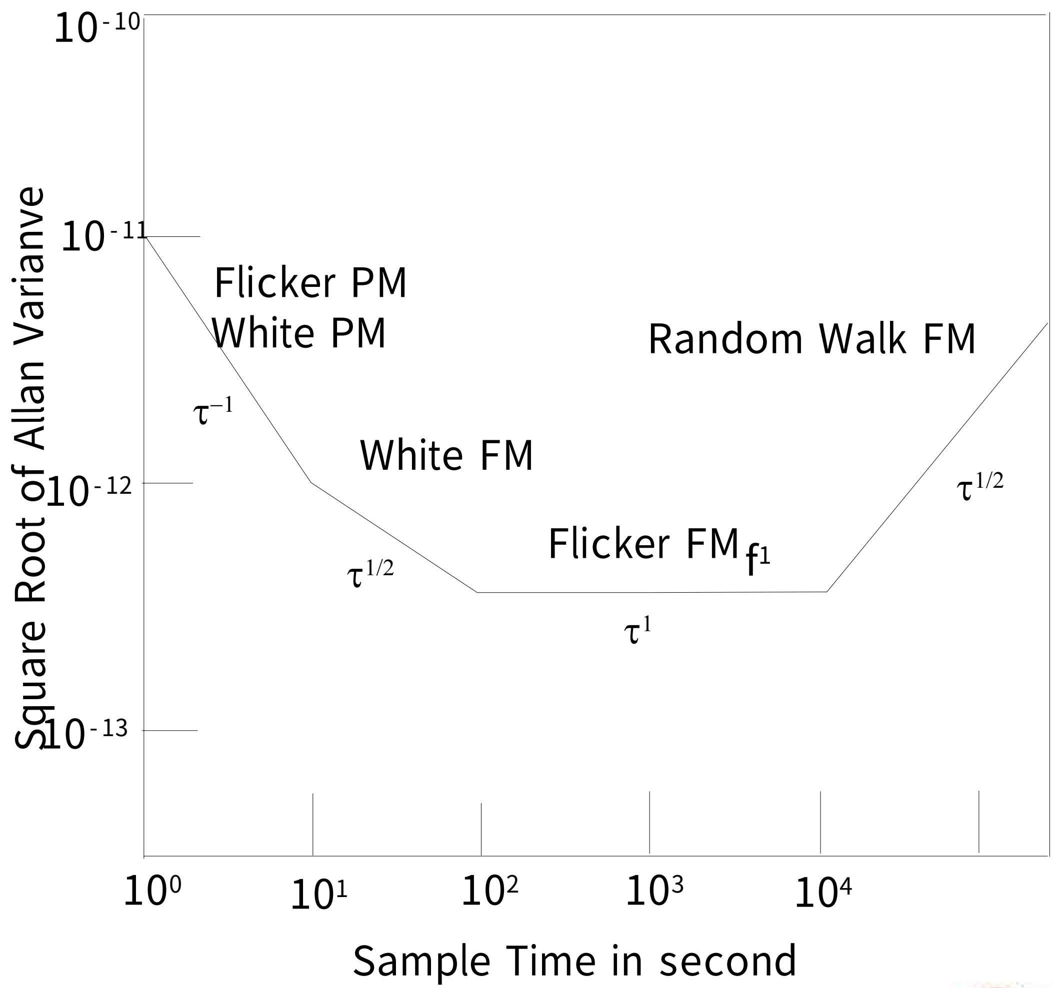
$$\text{TDEV(TVAR)} = \frac{(m\tau_0)^2}{3}\,\text{MVAR}$$

Model of Sy(f)



Relative Frequency Power Spectral Density
10-19
10-20
10-21
10-22
10-23
10-24
Random Walk FM
f-2
Flicker FM
f-1
White FM
f0
Flicker PM
f1
White PM
f2
100
101
102
103
104
105
Fourier Frequency in HZ

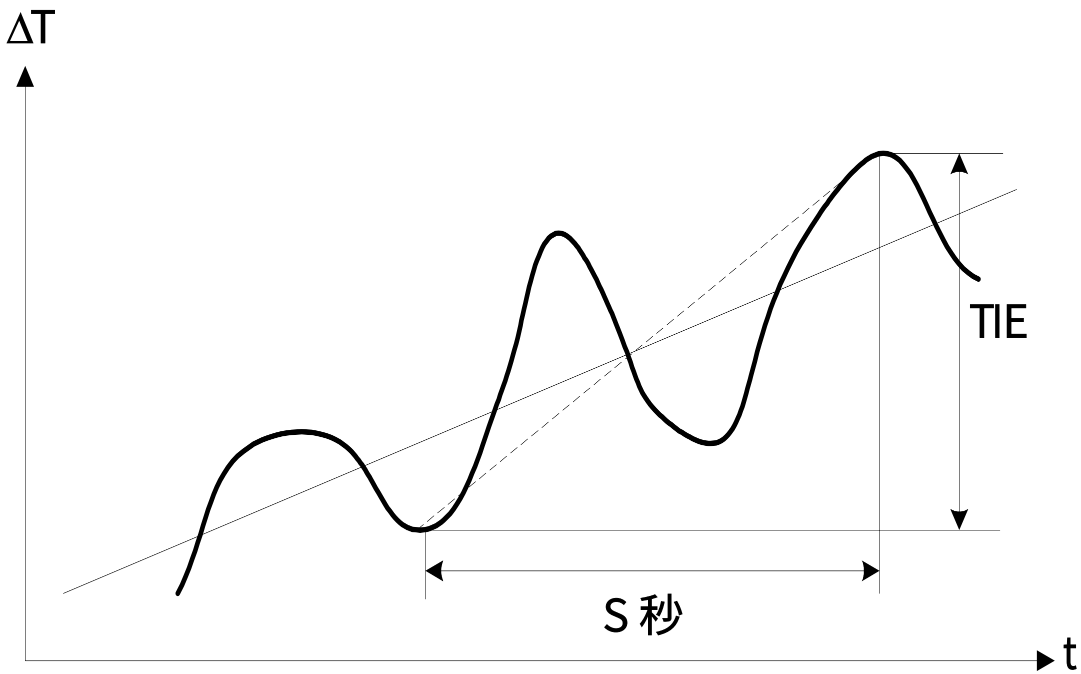
Model of time domain frequency stability



주파수 안정도의 변환

잡음의 종류	위상잡음 스펙트럼 밀도 $(S_\Phi(f))$	상대주파수 변동 스펙트럼 밀도 $(S_y(f))$	알랜분산 $\left(\sigma_y{}^2(\tau)\right)$	$S_y(f) = a\sigma_y{}^2(\tau)$ $a =$	$\sigma_y{}^2(\tau) = bS_\Phi(f)$ $b =$
White phase noise	f^0	f^2	τ^{-2}	$\frac{(2\pi)^{2\tau^2 f^2}}{3f_h}$	$\frac{3f_h}{(2\pi)^2\tau^2\nu_0{}^2}$
Flicker phase noise	f^{-1}	f^1	τ^{-2}	$\frac{(2\pi)\tau^2 f}{3.81+3\ln(\omega_h\tau)}$	$\frac{[3.81+3\ln(\omega_h\tau)]f}{(2\pi)^2\tau^2\nu_0{}^2}$
White frequency noise	f^{-2}	f^0	τ^{-1}	2τ	$\frac{f^2}{2\tau\nu_0{}^2}$
Flicker frequency noise	f^{-3}	f^{-1}	τ^0	$\frac{1}{2\ln(2)f}$	$\frac{2\ln(2)f^3}{\nu_0{}^2}$
Random walk frequency noise	f^{-4}	f^{-2}	τ^1	$\frac{6}{(2\pi)^2\tau f^2}$	$\frac{(2\pi)^2\tau f^4}{6\nu_0{}^2}$

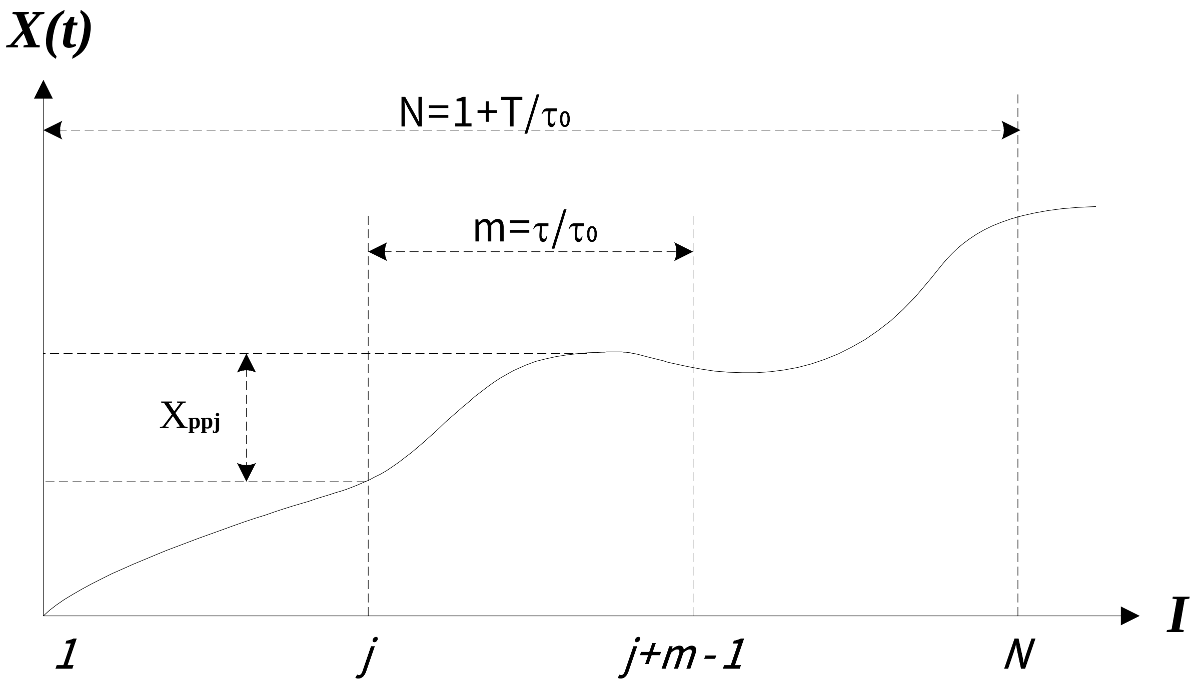
TIE (Time Interval Error)



$$TIE = \Delta T(t+S) - \Delta T(t)$$

$$\frac{\Delta f}{f}(=y) = TIE/S$$

MTIE (Maximum TIE)



τ_0 : Sample Period[s]

T : Measurement Periods[s]

$\tau = m\tau_0$: Observation Time

$$\mathrm{MTIE}(\tau) = \max_{j=1}^{N-m+1}\left[\max_{i=j}^{m+j-1}(Xi) - \min_{i=j}^{m+j-1}(Xi)\right]$$