스톱워치 및 타코메타의 교정 및 측정 불확도 산출

신 은 주

2003. 6.

목 차

스톱워치의 교정 및 불확도 산출

용어의 정의 (1/2)

- **상대 시간차 (relative time-difference)**

$$y \equiv \frac{\Delta T}{T} = \frac{T_i - T}{T}$$

여기서, T 와 T_i 는 기준경과시간과 스톱워치의 측정시간을 나타낸다.

주파수 측정의 경우, 기준주파수 f 에 대하여 측정주파수가 f_i 일 때,

상대주파수는 다음과 같다.

$$y = \frac{\Delta f}{f} = \frac{f_i - f}{f} = \frac{\Delta T}{T}$$

용어의 정의 (2/2)

- **상대 불확도 (relative uncertainty)**

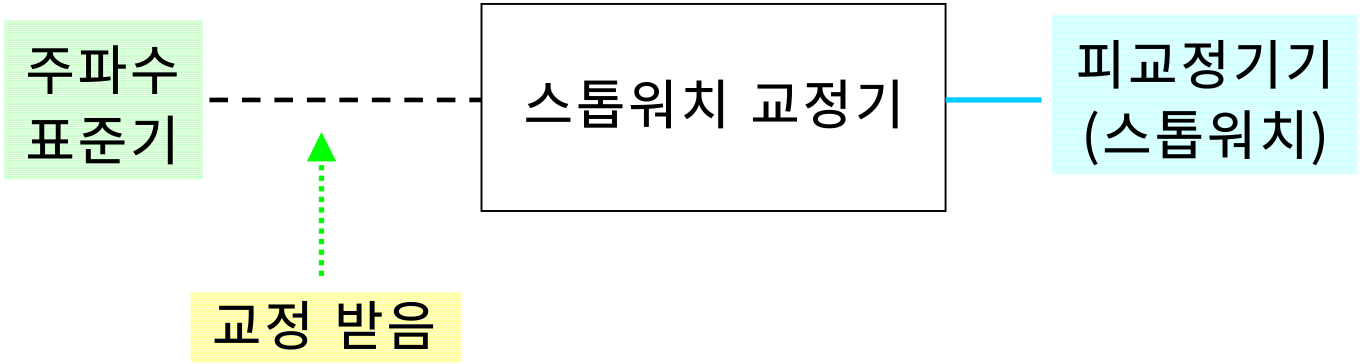
상대 시간차 측정량에 대한 불확도

- **A형 상대 표준 불확도 (** u_{A_y} **)** : 통계적 분석으로부터
- **B형 상대 표준 불확도** (u_{B_y}) : 보통 계기의 측정 분해능으로부터
- 상대 합성 표준 불확도 (u_{C_y}) : $u_{C_y} = \sqrt{u_{A_y}{}^2 + u_{B_y}{}^2}$
- 상대 확장 불확도 (U_y) : $U_y = k \times u_{C_y}$
- 포함인자 (k):확장 불확도를 구하기 위해 합성 표준 불확도에 곱하는 수치인자. (KRISS는 95 %의 신뢰수준에 *k=2* 를 채택)

교정시스템 *(1/2)*

- 스톱워치 교정기 **(Witchi Q Test 6000)**

측정량 : **~ s/d** (또는 상대 시간차 ~ **s/86400 s**)



교정시스템 (2/2)

- 스톱워치 교정기 **(Witchi Q Test 6000)** 의 세슘원자 주파수 표준기에 대한 상대 시간차 및 상대 확장 불확도 **(**샘플링타임 **100 s,** 측정회수 **250**회**)**

표 1.

Relative time-difference ($\overline{y_{cal}}$)	Relative expanded uncertainty ($2\times u_{cal}$)
$+\ 8.0\times10^{-8}$	$\pm\ 9.3\times10^{-9}$

KRISS에서 교정받은 스톱워치 교정기의 성적서 값

측정 불확도 계산 (1/8)

- 스톱워치 교정의 수학적 모델:

$$\overline{y} = \overline{y_i} + \overline{y_{cal}} + \overline{y_{ref}} \approx \overline{y_i} + \overline{y_{cal}}$$

KRISS에서 교정받은 스톱워치 교정기의 성적서 값

측정값의 평균

교정기의 offset

표준기의 offset

$\sim 10^{-14}$

무시할 만큼 작은 양

- 합성 표준 불확도:

$$u_{\overline{y}} = \sqrt{u_{\overline{y_i}}^{\,2} + u_{cal}^{\,2} + u_{ref}^{\,2}} \approx \sqrt{u_{\overline{y_i}}^{\,2} + u_{cal}^{\,2}}$$

$\sim 10^{-15}$

무시할 만큼 작은 양

측정 불확도 계산 (2/8)

표 2.

Number of measurement (N)	Time difference (ΔT), s/d	Relative time difference (y_i)
1	-1.46	-1.69×10^{-5}
2	-1.45	-1.68×10^{-5}
3	-1.45	-1.68×10^{-5}
4	-1.45	-1.68×10^{-5}
5	-1.46	-1.69×10^{-5}
6	-1.45	-1.68×10^{-5}
7	-1.44	-1.67×10^{-5}
8	-1.45	-1.68×10^{-5}
9	-1.46	-1.69×10^{-5}
10	-1.46	-1.69×10^{-5}
Average	-1.45	-1.68×10^{-5}
Standard deviation	0.0068	7.87×10^{-8}

측정 불확도 계산 (3/8)

1.1 피교정 스톱워치의 주파수 표준기에 대해 보정된 평균 상대시간차 :

$$\overline{y} = \overline{y_i} + \overline{y_{cal}}$$

$$= -1.7\times10^{-5} + (8.0\times10^{-8}) = -1.7\times10^{-5}$$

1.2 $\overline{y}$ 의 상대 불확도 계산 : $u_{\overline{y}} = \sqrt{u_{\overline{y_i}}^{\ 2} + u_{cal}^{\ 2}}$

1.2.1 $\overline{y_i}$ 의 상대 표준 불확도 : $u_{\overline{y_i}} = \sqrt{u_{A_y}^{\ 2} + u_{B_y}^{\ 2}}$

1.2.2. $\overline{y_{cal}}$ 의 상대 표준 불확도 : u_{cal} (표1 참조)

측정 불확도 계산 (4/8)

1.2.1 $\overline{y_i}$ 의 상대 표준 불확도

1.2.1.1. A형 상대 표준 불확도 (표2 참조)

$$u_{A_y} = \sigma_y / \sqrt{N} = 2.5 \times 10^{-8}$$

1.2.1.2 B형 상대 표준 불확도

$$0.01s / d = 0.01s / 86400s = 1.2 \times 10^{-7}$$

$$u_{B_y} = \frac{1.2 \times 10^{-7}}{2\sqrt{3}} = 3.3 \times 10^{-8}$$

1.2.1.3 $\overline{y_i}$의 상대 합성 표준 불확도

$$u_{\overline{y_i}} = \sqrt{{u_{A_y}}^2 + {u_{B_y}}^2} = 4.2 \times 10^{-8}$$

측정 불확도 계산 (5/8)

1.2.2. $\overline{y_{cal}}$의 상대 표준 불확도 (표1 참조)

$$u_{cal} = 4.7 \times 10^{-9}$$

1.2.3. $\overline{y}$ 의 상대 합성 표준 불확도

$$u_{\overline{y}} = \sqrt{u_{\overline{y_i}}^{\ 2} + u_{cal}^{\ 2}} = 4.2 \times 10^{-8}$$

1.2.4. $\overline{y}$ 의 상대 확장 불확도

$$U_y = 2 \times u_{\overline{y}} = 8.4 \times 10^{-8}$$

불확도 총괄표 (6/8)

표 3.

불확도 요소	type	상대 표준 불확도	비 고
스톱워치 교정기	상대 합성 표준 불확도	4.7×10^{-9}	교정기의 성적서 값, u_{cal}
반복측정	A	2.5×10^{-8}	u_{A_y}
측정기	B	3.3×10^{-8}	u_{B_y}
스톱워치	상대 합성 표준 불확도	4.2×10^{-8}	$u_{\bar{y}}$
스톱워치	상대 확장불확도	8.4×10^{-8}	$U_y = 2\times u_{\bar{y}}$

측정 불확도 계산 (7/8)

1.3.1 교정 결과

피 교정 스톱워치는 주파수 표준기에 대해 다음의 상대 시간차를 갖는다.

$$y = -1.7 \times 10^{-5} \pm 8.4 \times 10^{-8}$$

여기서 ± 기호 다음의 숫자는 상대 확장 불확도이며

신뢰수준 95 % (포함인자 $k = 2$) 이다.

측정 불확도 계산 (8/8)

1.3.2 교정 결과의 실 례

교정받은 스톱워치는 기준 시간 1000 s의 경과에 대해 다음의 값을 지시한다.

$$(999.98300 \pm 0.00008)$$

단, 지시값 T_i 는

$$T_i = (1+y)T = (1-1.7\times10^{-5})\times1000 = 999.983$$ 이며

확장 불확도 U는 (단 k=2)

$$U = 2\times[1000\times\{(8.4\times10^{-8})/2\}] = 0.000084$$ 이다.

(해설) 이 스톱워치는 실제 값보다 작은 값을 표시한다.

타코메타의 교정 및 불확도 산출

용어의 정의

- **회전 주파수 (rotational frequency)**

회전 물체의 회전수를 나타내는 것으로서,

단위는 rpm은 사용하지 않으며

r/min (revolutions per minute) 을 사용한다.

또는 r/s (revolutions per second) 을 사용할 수 있다.

- 회전 속도계 (Tachometer)

회전 운동을 하고 있는 물체의 회전 속도 또는 회전 주파수를

측정하는 기기

교정시스템 (1/4)

- **회전속도 표준 교정시스템 (KRISS-P01C, KRISS-P02A, KRISS-P03A)**

측정량 : 회전속도 또는 회전 주파수를

표준 회전속도 또는 표준 회전주파수와 비교 측정

- 광 신호 발생기 **(KRISS-P02A):** 광 검출식 회전속도계의 교정
- 기준 회전수 발생장치 **(KRISS-P01C):** 접촉식 회전속도계의 교

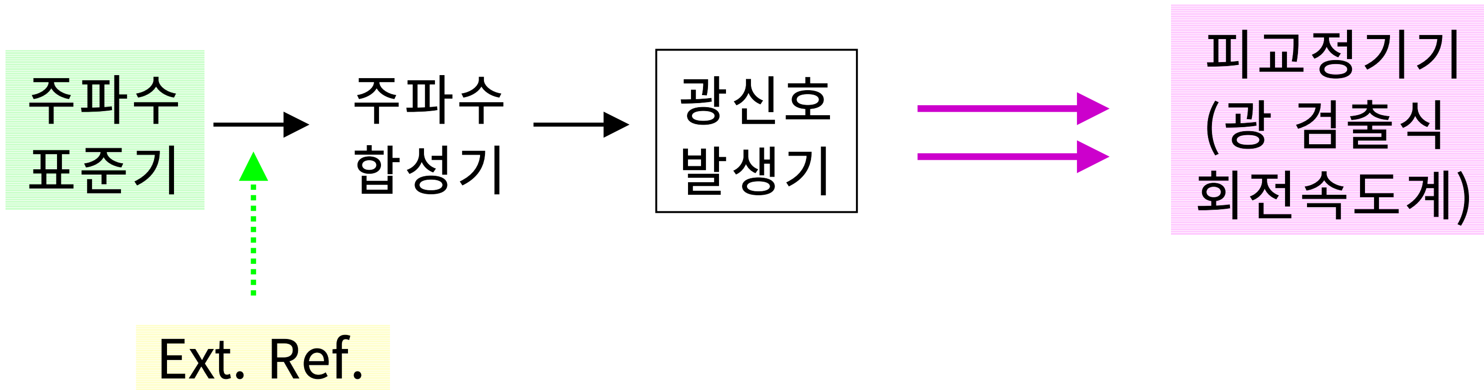
교정

기 **(KRISS-P03A):** 섬광식 회전속도계의 교정

교정시스템 (2/4)

- 광 신호 발생기 **(KRISS-P02A): 광 검출식 회전속도계의 교정에**

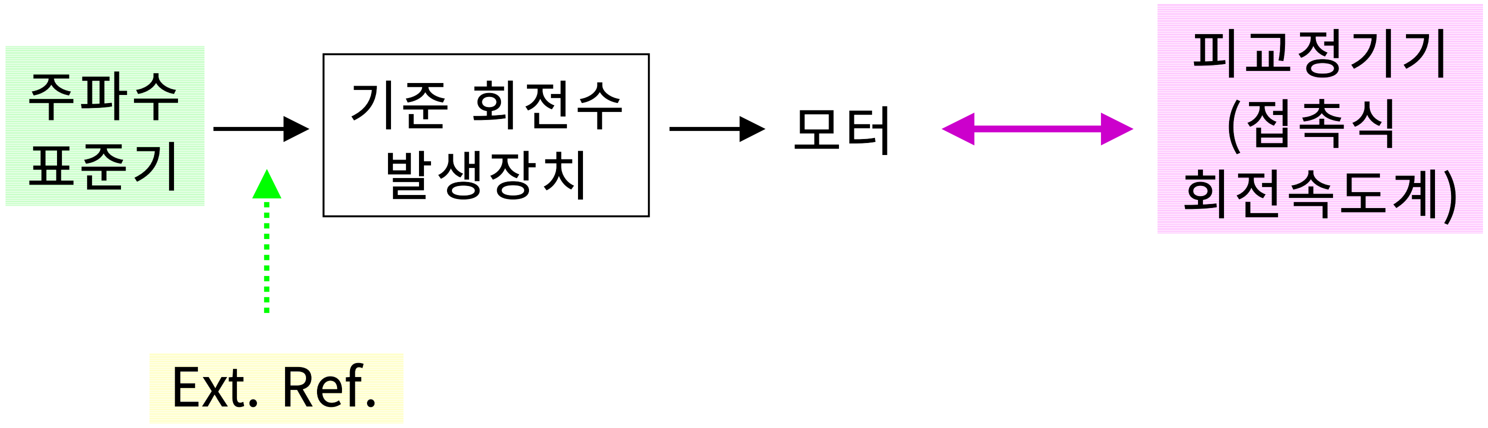
(측정범위 : 300 ~ 90,000 r/min)



교정시스템 *(3/4)*

- **기준 회전수 발생장치 (KRISS-P01C): 접촉식 회전속도계의 교정에**

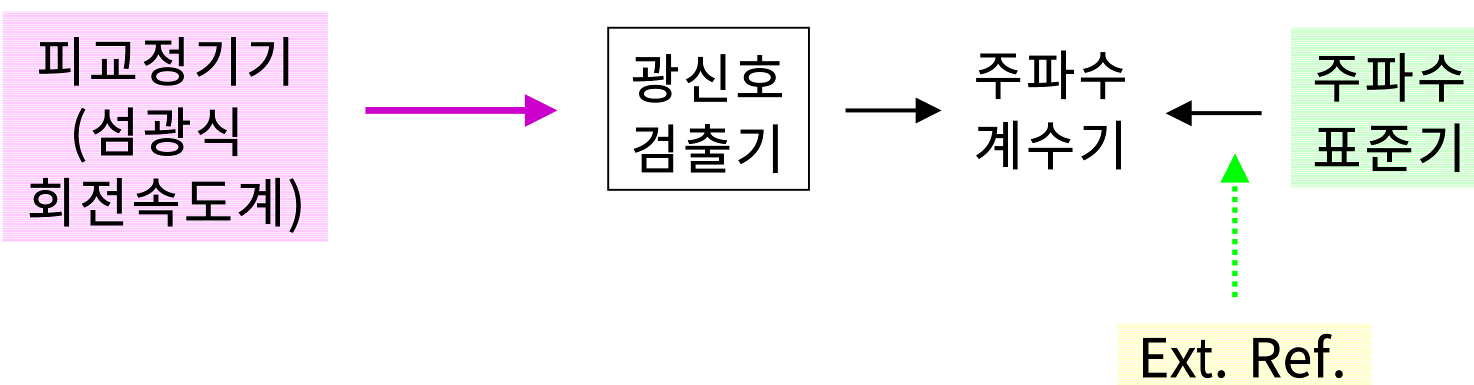
(측정범위 : 300 ~ 4,000 r/min)



교정시스템 (4/4)

- 광 신호 검출기 **(KRISS-P03A):** 섬광식 회전속도계의 교정에

(측정범위 : 300 ~ 90,000 r/min)



측정 불확도 계산 (1/7)

- 타코메타 교정의 수학적 모델:

$$\overline{R} = \overline{R_i} + \overline{R_{cal}} + \overline{R_{ref}} \approx \overline{R_i}$$

측정값의 평균 교정기의 offset 표준기의 offset

$10^{-8} \sim 10^{-14}$ 무시할 만큼 작은 양

$\sim 10^{-14}$ 무시할 만큼 작은 양

- 합성 표준 불확도:

$$u_{\overline{R}} = \sqrt{u_{\overline{R_i}}^{\,2} + u_{cal}^{\,2} + u_{ref}^{\,2}} \approx \sqrt{u_{\overline{R_i}}^{\,2} + u_{cal}^{\,2}}$$

무시할 만큼 작은 양, $\sim 10^{-15}$

측정 불확도 계산 *(2/7)*

표 4.

Number of measurement (N)	Reference value r/min	Measured value (R_i), r/min
1	4000.0	4000
2		4000
3		4000
4		4000
5		4000
6		4000
7		4000
8		4001
9		4000
10		4000
Average	-	4000.1
Standard deviation	-	0.32

측정 불확도 계산 (3/7)

1.1 피교정 접촉식 타코메타의 평균 측정 값 :

$$\overline{R} = \overline{R_i} = 4000.1$$

1.2 $\overline{R}$ 의 불확도 계산 : $u_{\overline{R}} = \sqrt{u_{\overline{R_i}}{}^2 + u_{cal}{}^2}$

1.2.1 $\overline{R_i}$ 의 표준 불확도 : $u_{\overline{R_i}} = \sqrt{u_A{}^2 + u_B{}^2}$

1.2.2. $\overline{R_{cal}}$ 의 표준 불확도 : u_{cal}

1.2.1 $\overline{R_i}$ 의 표준 불확도

1.2.1.1. A형 표준 불확도

$$u_A = \sigma / \sqrt{N} = 0.10$$

1.2.1.2 B형 표준 불확도

$$u_B = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.29$$

1.2.1.3 $\overline{R_i}$의 합성 표준 불확도

$$u_{\overline{R_i}} = \sqrt{u_A^{\ 2} + u_B^{\ 2}} = 0.31$$

측정 불확도 계산 (5/7)

1.2.2. $\overline{R_{cal}}$의 표준 불확도 (참고 : 비접촉식 타코메타의 경우 무시할 만큼 작은 양)

$$u_{cal} = \frac{0.1}{2\sqrt{3}} = 0.029$$

1.2.3. $\overline{R}$ 의 상대 합성 표준 불확도

$$u_{\overline{R}} = \sqrt{u_{\overline{R_i}}^{\ 2} + u_{cal}^{\ 2}} = 0.3$$

1.2.4. $\overline{R}$ 의 상대 확장 불확도

$$U = 2 \times u_{\overline{R}} = 0.6$$

불확도 총괄표 *(6/7)*

표 5.

불확도 요소	type	표준불확도	비 고
접촉식 타코메타 교정기	B	0.029	u_{cal}
반복측정	A	0.10	u_A
측정기	B	0.29	u_B
타코메타	합성 표준 불확도	0.3	$u_{\bar{R}}$
타코메타	확장불확도	0.6	$U = 2 \times u_{\bar{R}}$

측정 불확도 계산 (7/7)

1.3 교정 결과

피 교정 타코메타는 4000.0 r/min의 기준 값에 대해 다음의 값을 갖는다.

(4000.1 ± 0.6) r/min

여기서 ± 기호 다음의 숫자는 확장 불확도이며

신뢰수준 95 % (포함인자 k = 2) 이다.

불확도 보고 *(측정 불확도 표현지침 참고)*

공통 사항

- $u_c(y)$ 및 U의 수치 값은 일반적으로 **유효숫자 두 자리**면 충분함
- 최종결과를 보고할 때 불확도는 반올림한 값보다 올림하는 것이 적합할 경우가 종종 있다.

  예: $u_c(y)$ = 10.47 m -> 11 m,

  그러나 $u(x_i)$= 28.05 kHz -> 28 kHz
- 추정값은 그 불확도와 양립하도록 근사값 (자리수)을 결정할 것

  예: y=10.057 62 Ω, $u_c(y)$ = 27 mΩ 인 경우,

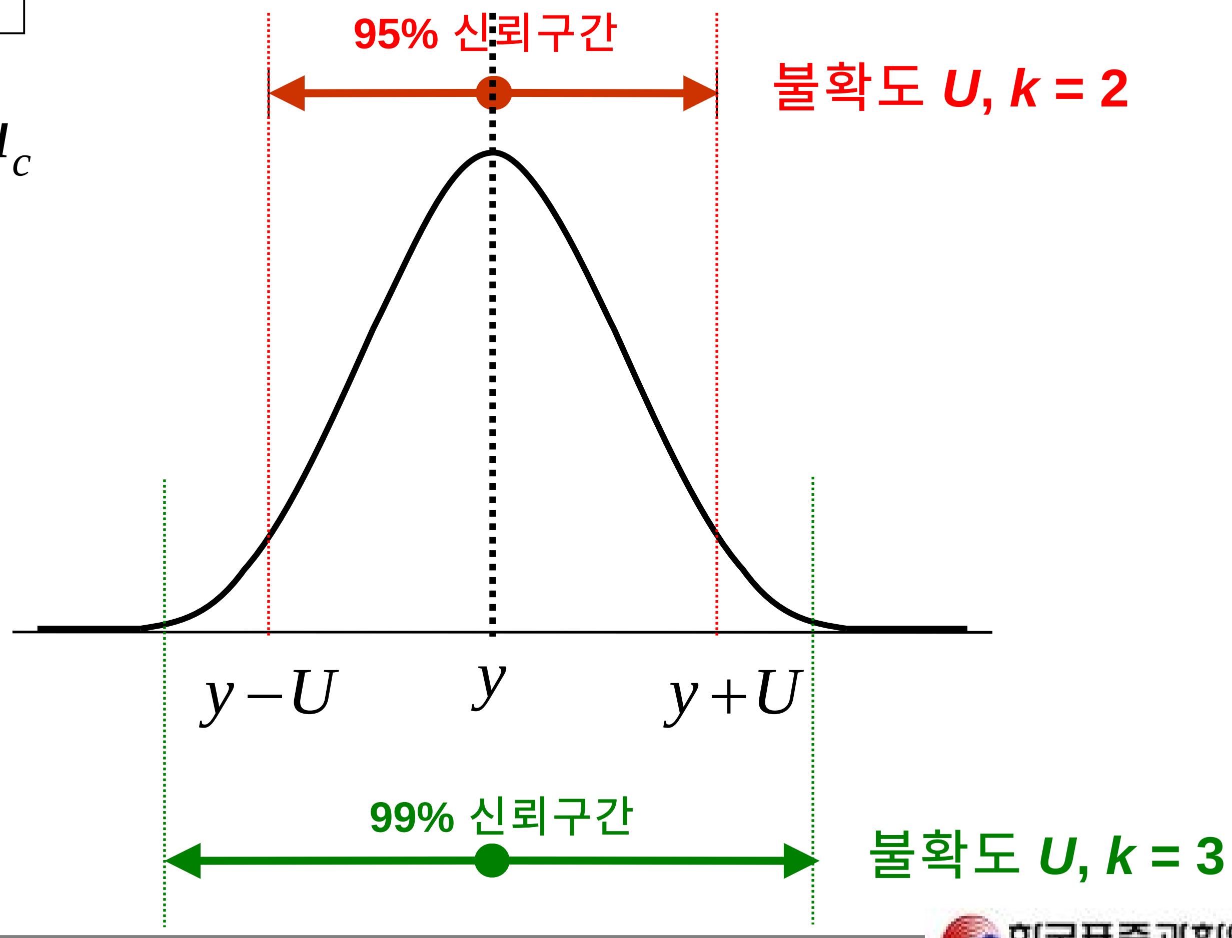
  y=10.058 Ω으로 반올림
- 피측정기기가 고객의 실험실로 되돌려질 때 발생될 수 있는 불확도나 고객의 실험실에서 다른 측정의 교정용 표준기로 사용될 때 생길 수 있는 불확도를 추정하여 포함시켜서는 안됨. 어디까지나 **연구원 (KRISS)에서 평가된 값만으로 산출되어야 함.**
- 운반과정, 기계적 손실, 시간의 경과, 측정환경 차이로 인한 불확도가 클 경우에는 불확도 보고서에 **주의사항**으로 첨부할 것.

유효 자유도의 적용

교정 결과

$$\boxed{Y = y \pm U}$$

$$U = k \times u_c$$



불확도 산출 단계

수식 세우기

불확도 요소

표준 불확도, u_i

감도계수, C_i

합성 표준 불확도, u_c

신뢰수준, 유효자유도

확장 불확도, U

확장 불확도와 유효자유도

- **GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement; 측정 불확도 표현지침)은 확장 불확도를 계산할 때 Welch-Satterthwaite formular를 쓰도록 권장.**

Effective degrees of freedom (유효자유도)
- Welch-Satterthwaite formula

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{[c_i u(x_i)]^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(y)}{\frac{u^4(x_1)}{(n-1)} + \frac{u^4(x_2)}{\infty}} \Rightarrow \boxed{\nu_{eff} > n-1}$$

n : 측정회수

확장 불확도, U

$$U = k \times u_c$$

- 신뢰수준 95 %를 만족하는 포함인자 k 값은 ?

  유효자유도 (또는 대략 측정회수)에 따라서 다른 k 값을 갖는다.

  → T-분포표

포함인자 k의 결정 : t-분포표

Degrees of freedom	Levels of confidence (%)		
	90	95	99
…			
40	1.68	2.02	2.70
45	1.68	2.01	2.69
…			
50	1.68	2.01	2.68
100	1.660	$\boxed{1.984}$	2.626
∞	1.645	1.960	2.576

- 유효자유도가 증가함에 따라 포함인자 k 의 값은 작아진다.
- 유효자유도가 **100**일 때 신뢰수준 **95 %**를 만족하는 포함인자는 k **= 1.984**

(즉, 적어도 100 번 이상은 측정해야 k = 2를 만족한다.)

확장 불확도와 측정회수

그렇다면,

신뢰수준 95 %를 만족하는 포함인자 k **= 2**로 확장 불확도를 사용하려면,

꼭 **100** 번 이상의 측정을 해야 하는가 **?**

→ 회전수 측정의 경우를 알아보자.

회전수 측정에서 유효자유도

- 회전수 측정의 불확도 모델 (합성 표준 불확도)

$$u_{\overline{R_k}} = \sqrt{u_{\overline{R_i}}^{\,2} + u_{cal}^{\,2}} \approx \sqrt{u_A^{\,2} + u_B^{\,2} + u_{cal}^{\,2}} = u_c(y)$$

- 유효자유도

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i)\right]^4 / \nu_i} = (n-1)\left[1 + \left(\frac{u_B}{u_A}\right)^2 + \left(\frac{u_{cal}}{u_A}\right)^2\right]^2$$

여기서 $u_1 = u_A, \nu_1 = n-1$ (n : 측정회수)

$u_2 = u_B, \nu_2 = \infty$ (불확도의 신뢰도 : 100 %)

$u_3 = u_{cal}, \nu_3 = \infty$ (불확도의 신뢰도 : 100 %)

$c_1 = c_2 = c_3 = 1$

유효자유도와 표준불확도 (1/2)

- 95 %의 신뢰도를 가지며 k=2를 만족하는 조건은 아래와 같다.

$$\nu_{eff} = 100 \quad \rightarrow \quad k = 1.984$$

- $k < 2$ 또는 $\nu_{eff} \geq 100$ 를 만족하는 최소의 측정회수는 ?

$$\nu_{eff} \geq 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{B_T}}{u_A} \geq \left(\frac{10}{\sqrt{n-1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$where \qquad u_{B_T}^2 = u_B^2 + u_{cal}^2 \,,$$

유효자유도와 표준불확도 (2/2)

$k < 2$ 또는 $\nu_{eff} \geq 100$를 만족하는 최소의 측정회수

$$\frac{u_{B_T}}{u_A} \geq \left(\frac{10}{\sqrt{n-1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

◆ $u_A = 0$ 인 경우: (측정값의 변화가 없을 때)

$n > 1$ 보다 크면 위의 식 만족 : 2 번만 측정해도 만족됨

◆ $\frac{u_{B_T}}{u_A} \geq 1$ 인 경우: (A형 불확도가 B형 불확도 범위안에 있을 때)

$n < 26$ 이면 위의 식 만족 : 최고 26 번까지만 측정해도 만족됨

(예) $\frac{u_B}{u_A} = 2$ 인 경우는 n =5, 즉 5회 측정으로 신뢰도 95 %와 포함 인자 k=2를 만족 한다