측정불확도 표현지침
(시간주파수 분야)

KRISS Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement

유대혁
한국표준과학연구원 시간주파수그룹

2003. 6. 10. – 12.

시간주파수 분야 전문가교육

측정 불확도의 기본 개념 : 측정

측정

측정하고자 하는 특정한 양의 값을 결정

측정량

측정방법

측정절차

측정결과

(추정값 + 불확도)

측정 불확도의 기본 개념 : 오차와 보정

오차

측정값 – 참값
(참값은 알 수 없음)

우연오차

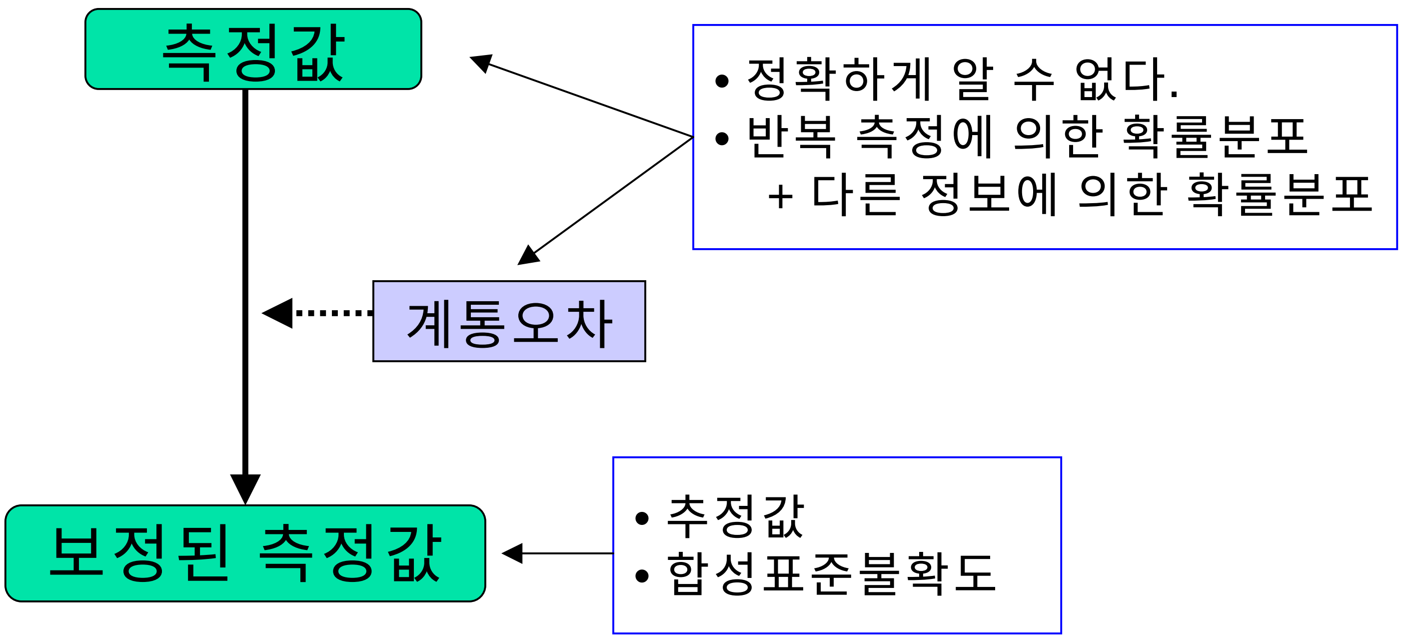
• 영향량들의 시.공간적 예측할 수 없는 변동에 기인
• 보정할 수 없음
• 관측회수를 늘려서 줄일수 있음
• 기대값은 영(0)

계통오차

• 알 수 있는 영향량에 기인(계통효과)
• 보정할 수 있음
• 보정 후 기대값은 영(0)
• 보정시 불확도 고려

(주의) 오차와 불확도는 완전히 다른 개념이다.

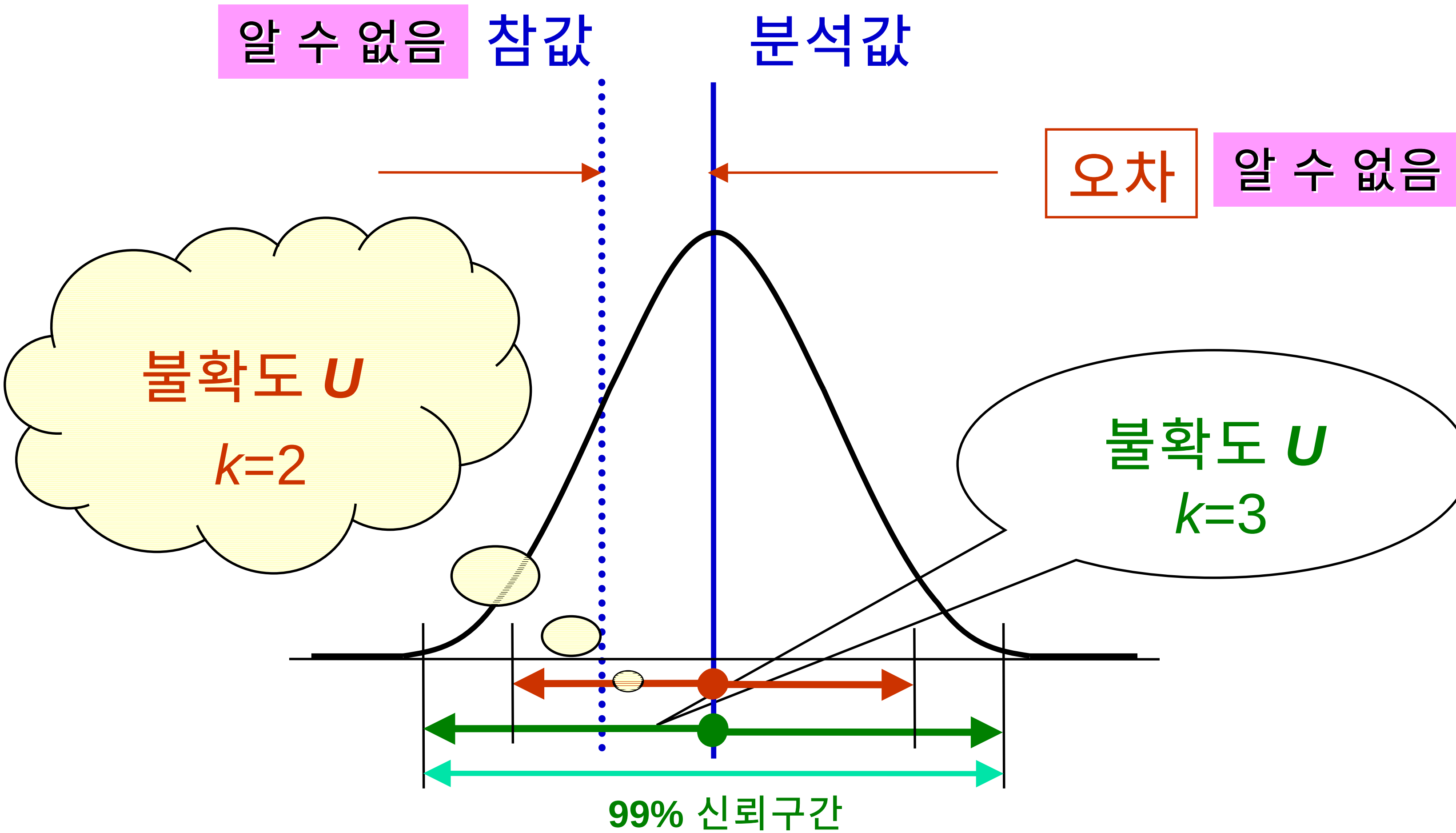
측정 불확도의 기본 개념 : 불확도



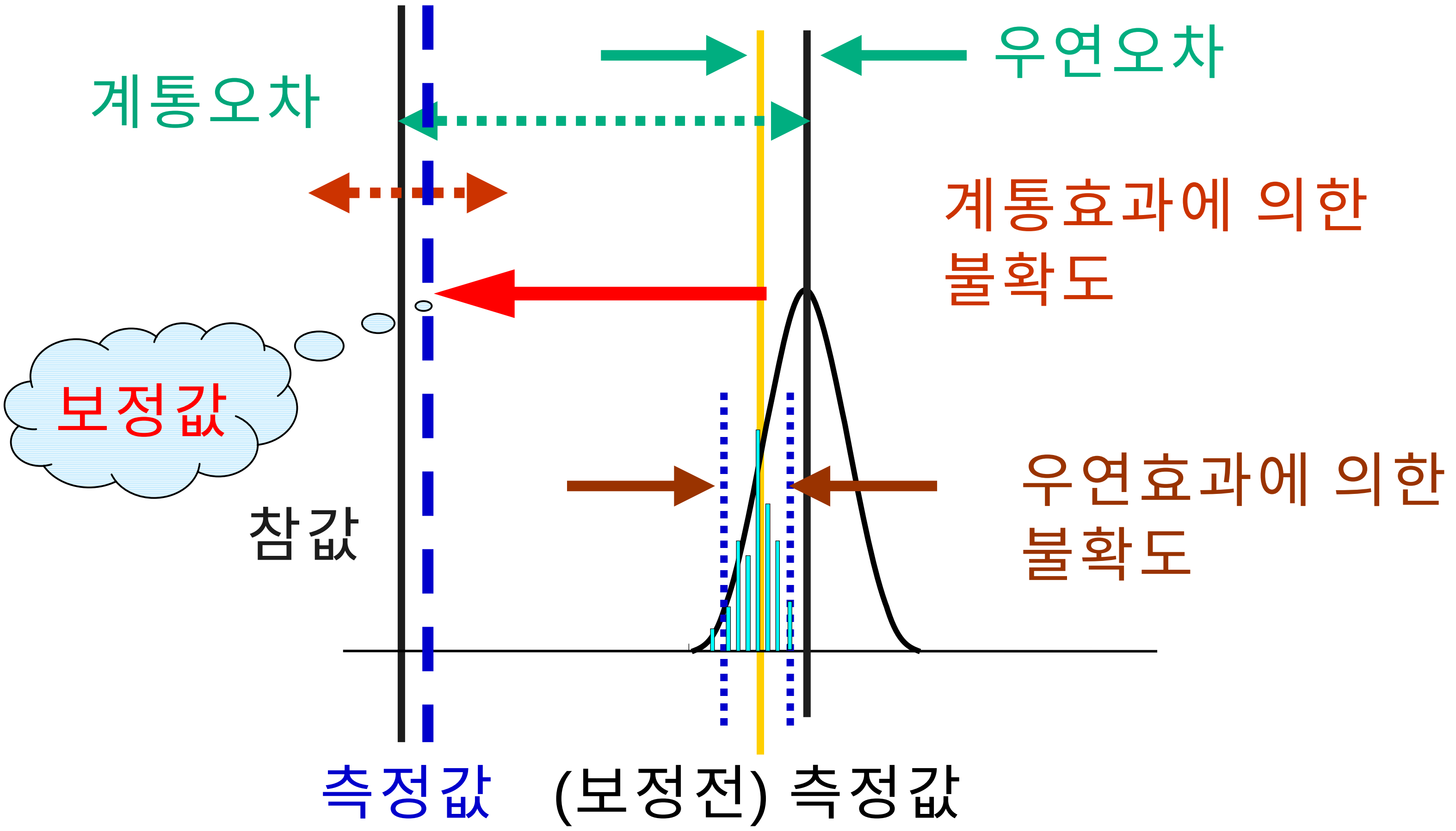
합성표준불확도 : 측정결과의 가능한 오차에 대한 신뢰성.
(즉, 가능한 오차의 범위를 나타냄)

!!. 오차=측정값 – 참값 이고, 참값은 알 수 가 없다. !!

측정 불확도의 기본 개념 : 오차와 불확도



측정 불확도의 기본 개념 : 오차와 불확도



측정 불확도의 기본 개념 : 불확도의 요인

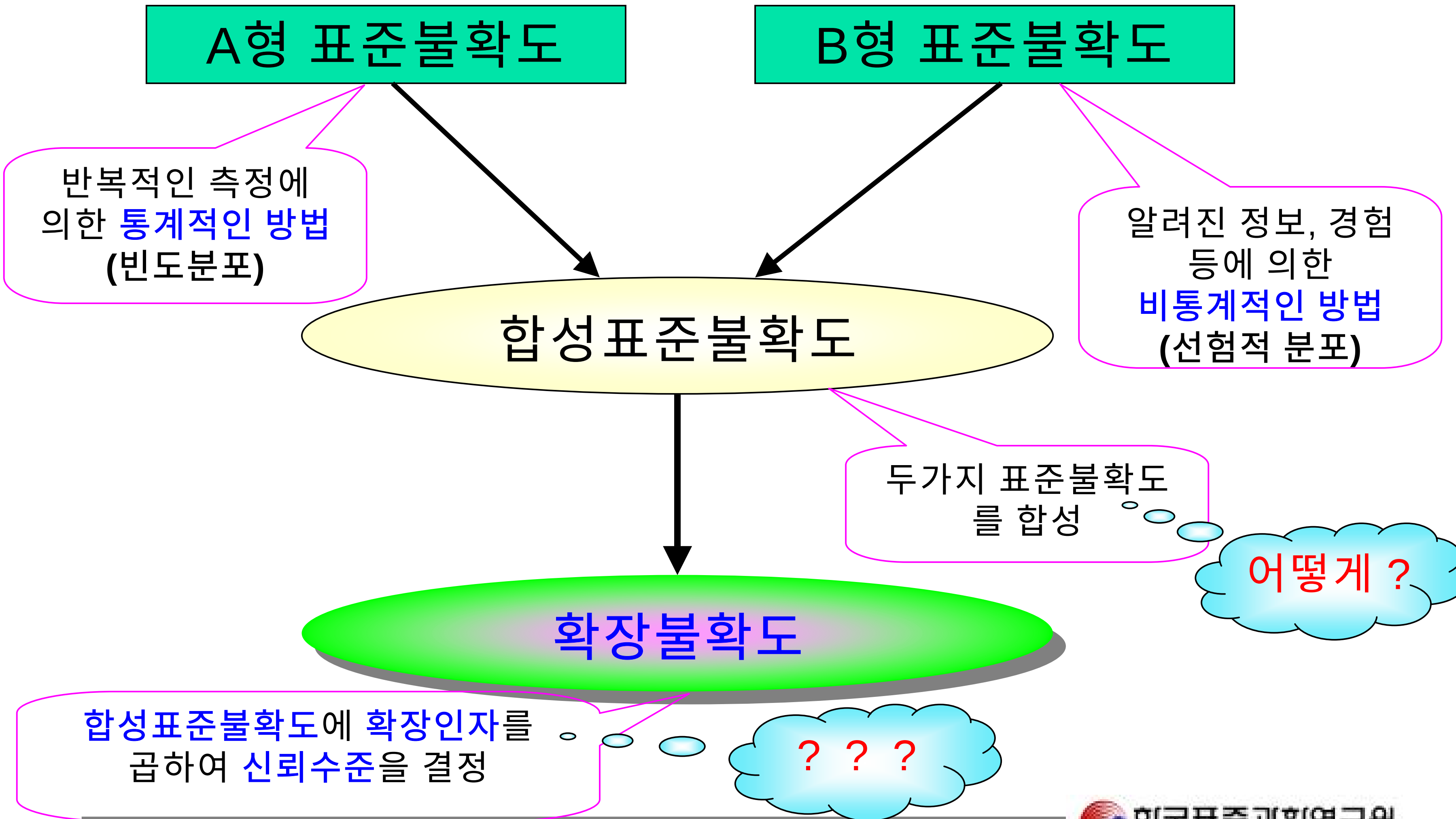
1. 측정량에 대한 불완전한 정리
2. 측정량의 정의에 대한 불완전한 실현
3. 대표성이 없는 표본 추출
4. 측정환경에 대한 불완전한 지식 및 환경조건에 대한 불완전한 측정
5. 개인의 판독의 차이
6. 기기의 분해능과 검출의 한계
7. 측정표준과 표준물질의 불완전한 값
8. 외부자료를 인용하여 사용한 상수와 파라미터의 부정확한 값
9. 측정방법 및 과정에서 사용한 근사값과 여러가지 가정
10. 외관상 같은 조건이지만 반복측정에서 나타나는 변동, 등

↓

불확도 산출에 반영

(사람의 사고, 양심, 인격, 이해수준, 분석의 정확도 등에 의해 불확도 품질이 결정됨)

측정 불확도의 기본 개념 : 불확도의 평가



여기서 잠깐 . . .

지금부터의 내용은
개념의 이해 중심으로
엄밀한 수학 표현은 사용하지 않고
시간주파수 분야에 적용되는 부분만 다룬다.
자세하고 정확한 내용은
"주파수발생기의 측정불확도 산출",
"스톱워치 및 회전수의 측정불확도 산출" 강의와
한국표준과학연구원에서 발행한
"측정불확도 표현 지침"을 참조.

표준불확도 : 측정 모델

측정량 Y 는 다른 양 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 으로부터 결정

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$$

측정량 Y의 추정값 y 는 다른 양 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 의 추정값 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 로 부터 얻어진다.

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

각각 10 번씩 측정해서 얻은 평균값

예) 사각형의 면적 Y 는 가로 X_1 과 세로 X_2에 의해 결정된다.

$Y = f(X1,X2) = X_1 \times X_2$

사각형의 면적의 추정값 y 는 가로, 세로의 추정값 $x_1 = 5.0$ cm, $x_2 = 2.0$ cm 로부터

$y = x_1 \times x_2 = 10.0\ \text{cm}^2$

표준불확도 : A형 평가

입력량 q 의 A형 표준불확도

$$u_A = s(\overline{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \overline{q})^2 \right]^{1/2}$$

n 번 측정한 데이터의 표준편차에 $n^{1/2}$ 을 나눈 값

- 평균 $\overline{q}$ (추정값) 에 대한 불확도의 척도로 사용
- $\overline{q}$ 가 기대값을 얼마나 잘 추정하는가를 정량적으로 나타냄

예) 사각형의 가로 X_1 를 10 번 측정하여 평균값이 5.0 cm 였고, 표준편차가 0.1 cm 였다.

$u_A(x_1) = 0.1/\sqrt{10} \approx 0.03$ cm.

표준불확도 : B형 평가

- 반복된 관측으로 얻어지는 것이 아님
- 측정량의 변동성에 관하여 얻을 수 있는 모든 정보 이용
  - 과거 측정 데이터
  - 기기의 특성에 대한 경험이나 일반지식
  - 제작자의 규격
  - 교정 데이터: 교정 성적서
  - 핸드북에서 인용한 불확도
- 인용된 불확도(U)를 사용하는 경우 : 표준불확도(u)로 환산 (즉, 1 σ 에 해당하는 값을 구해야 함)
  - U=240 g (3 σ 수준) -> u= 240/3 = 80 g
  - U= 129 μΩ (신뢰수준: 99 %) : 99 %는 k=2.58에 해당
    ∴ u=129/2.58 = 50 μΩ
  - U=0.04 mm (신뢰수준: 50 %) : u=0.04/0.6745 = 0.06 mm

합성표준불확도 : 불확도의 전파법칙

$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 의 합성표준불확도는

$$u_c^2(y) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$: sensitivity coefficient (감도계수)

$u(x_i, x_j)$: estimated covariance (공분산의 추정값)

합성표준불확도 : 추정 상관계수

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$$

A형 불확도과 B형 불확도의 상관계수는 영 (0) 이다.

$r(x_i, x_j) = 0$ ⇨ $$u_c^2(y) = \sum c_i^2 u^2(x_i)$$

$r(x_i, x_j) = 1$ ⇨ $$u_c^2(y) = \left\{\sum c_i u(x_i)\right\}^2$$

$$\left(= \sum c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) \right)$$

휴 ! 다행이다. 시간 주파수 분야에서는 거의 ***r* =0** 아니면 ***r* =1** 이다.
더욱 좋은 것은 **c_i= 1** 이나 **–1** 이다.

합성표준불확도 : 상관계수 예 1

주파수 측정

한국표준과학연구원에서 교정 받은 주파수 카운터를 사용하여 주파수 발생기의 10 MHz 신호를 측정하였다. 100 회 측정하여
평균 주파수는 9 999 999.99 Hz , 합성표준불확도는 0.06 Hz

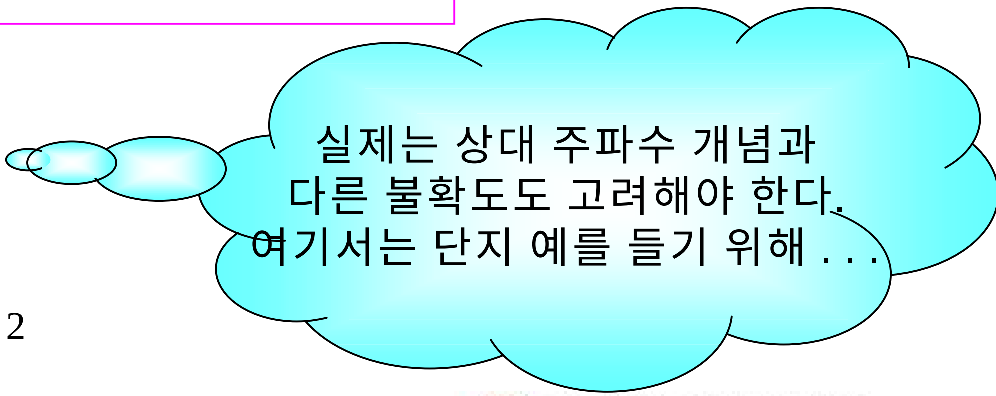
주파수 카운터의 교정 성적서에는 10 MHz 명목주파수 측정시
평균 주파수는 9 999 999.99 Hz , 확장불확도는 0.02 Hz (k=2)로 나타나 있다.

주파수 카운터의 offset : f_o = - 0.01 Hz
수학적 모델 : $\boldsymbol{f = f_m - f_o}$ (단, f_m 은 측정 주파수)

$$u_c^2(f) = \sum c_i^2 u^2(f_i)$$

$$= u^2(f_m) + u^2(f_o)$$

$$= (0.06)^2 + (0.02/2)^2$$



합성표준불확도 : 상관계수 예 2

시간간격 측정

$$x_i = F(q_1, q_2, \cdots, q_L)$$
$$x_j = G(q_1, q_2, \cdots, q_L)$$

입력량이 독립적인 변수들에 의해 결정
(즉, q_l 사이에는 상관관계가 없다.)

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \Leftarrow u(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l)$$

예) 1 pps 기준신호의 경우 (t1,t2,…,ti,…)

$F = G$ 이므로, $u(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\right)^2 u^2(q_l) = u^2(x_i), \quad u(x_i) = u(x_j)$

$$\Rightarrow \boxed{r(x_i, x_j) = 1}$$

너무 어렵다면
뒤의 예제만…

합성표준불확도 : 상관계수 예 2 - 계속

1 pps 기준신호로 100 s를 5 회 측정하여 A형 불확도가 0.1 ms 였다. 합성 표준불확도는 ? (단, 1 pps 의 불확도는 1 μs 이다.)

u_B *계산과정*

1 *pps의* 1 *s 간격* $t_1, t_2, \cdots$ *사이의 상관계수는* $r(t_i, t_j) = 1$ *이므로,*

$$u_B^2 = \left(\sum c_{Bi} u(t_i)\right)^2$$

이다. $t_T = t_1 + t_2 + \cdots$ *이고,* $t_1 = t_2 = \cdots = t_{1pps}$ *이므로,*

$$c_{Bi} = 1\,,\ u(t_1) = u(t_2) = \cdots = u(t_{1pps})$$

이다. 그러므로,

$$u_B = \sum u(t_i) = T \times u(t_{1pps}) \qquad (\text{단}, T = t_T)$$

$$u_c\,(T = 100) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

$$= \sqrt{(0.1 \times 10^{-3})^2 + (100 \times 1 \times 10^{-6})^2}$$

$$= 1.414 \times 10^{-4} \qquad (s)$$

확장불확도

$U = k \times u_c(y)$ (k 는 포함인자)

측정결과는 $Y = y \pm U$ 로 표현

포함인자 k 의 값은 $y - U$ 에서 $y + U$ 까지의 구간이 요구하는 구간의 신뢰수준(level of confidence, 또는 포함확률)에 따라 선택

↓

포함인자 k 의 값은 $u_c(y)$ 의 유효자유도를 추정하여 선택

확장불확도 : 유효자유도

합성표준불확도 $u_c(y)$ 의 유효자유도 ν_{eff}

(Welch-Satterthwaite formula)

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(x)}{\sum_{i=0}^{n} \frac{[c_i u(x_i)]^4}{\nu_i}}$$

(단, ν_i 는 $u(x_i)$ 의 자유도)

유효자유도는 합성표준불확도가 측정량의 표준편차를

얼마나 잘 추정하는가를 나타내는

"합성표준불확도의 불확도 척도"이다.

확장불확도 : 유효자유도 - 계속

A형 평가 n 번 측정으로 m 개의 파라미터를 결정할때

자유도는 　　　　　　 이다. (대개 m=1)

B형 평가

$$v \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{100}{R}\right)^2$$

여기서, $R = \Delta u(x_i) / u(x_i) \times 100\ (\%)$ 로 상대불확도의 백분율이다.
R 값이 작을수록 표준불확도의 신뢰성이 크다는 것을 의미한다.

예1) 표준불확도 25 % 까지 신뢰 : R = 0.25 X 100 = 25 %, v = 8
(표준불확도가 25 %까지 벗어날 수 있음.)

예 2) 표준불확도 0 % 까지 신뢰 (표준불확도를 100 % 확신)

R= 0 %, $v = \infty$

**B형 불확도를 적절히 잘 추정
하면 대부분 R=0 % 가 된다.**

확장불확도 : 포함인자 *k*

유효자유도가 구해지면 t-분포표를 이용하여 신뢰수준을 만족하는 확장인자 *k* 값을 결정할 수 있다.

T-distribution for degrees of freedom

Degrees of freedom	Levels of confidence (%)		
	90	95	99
…			
40	1.68	2.02	2.70
45	1.68	2.01	2.69
…			
50	1.68	2.01	2.68
100	1.660	1.984	2.626
∞	1.645	1.960	2.576

예) 유효자유도가 100 일때 신뢰수준 95 % 만족하는 확장인자는 ?

t-분포표로부터 k =1.984

(k 값이 클수록 신뢰수준은 높아진다.)

그러므로, 신뢰수준 95 %를 추정하기 위해 ***k* = 2** 를 사용할 수 있다.

확장불확도 : 포함인자 k – *주파수 측정*

Mathematical model

$$f = f_1 - f_2$$

- $f_1 = f_{meas}$: reading value from the frequency counter
- $f_2 = f_d$: frequency offset of the frequency calibration system

Uncertainty

$$u_c^2(f) = u^2(f_1) + u^2(f_2)$$

Type A $\nu_1 = n - 1$

Type B $\nu_2 = \infty$,

if we can trust $u(f_2)$ with 100 % level of confidence.

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(f)}{\sum_{i=0}^{n} \frac{[c_i u(f_i)]^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(f)}{\frac{u^4(f_1)}{(n-1)} + \frac{u^4(f_2)}{\infty}}$$

$\Rightarrow$ ν_{eff} > n-1

***n* >=100** 이면, **95 % 신뢰수준에 *k* =2** 를 사용할 수 있다.

확장불확도 : 포함인자 k – 회전수

수학적 모델

$$n = n_m + n_{ref} + n_{cal}$$

- n_m: 측정값의 평균
- n_{ref}: 기준값의 offset
- n_{cal}: 교정기의 offset

- 교정기에 입력한 기준주파수의 offset 과 불확도,
- 교정기의 offset 과 불확도가 무시할 만큼 작다고 가정하자.

불확도 성분

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2}$$

- 측정에 의한 A 형 불확도 : u_A
- 교정기의 분해능 : u_{B2}
- DUT 의 분해능 : u_{B2}

$$\nu_{eff} = \frac{\sum u^4}{\sum [c_i u_i]^2 / \nu_i} = (n-1)\left[1 + \left(\frac{u_{B1}}{u_A}\right)^2 + \left(\frac{u_{B2}}{u_A}\right)^2\right]^2$$

$$u_1 = u_A,\ \nu_1 = n-1$$
$$u_2 = u_{B1},\ \nu_2 = \infty$$
$$u_3 = u_{B2},\ \nu_3 = \infty$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

여기서 또 잠깐 . . .

유효자유도 계산을 실제 적용하는 것은

"주파수발생기의 측정불확도 산출",
"스톱워치 및 회전수의 측정불확도 산출" 강의와
한국표준과학연구원에서 발행한
"측정불확도 표현 지침"을 참조.

불확도 보고 (1/4)

1. 일반적 지침

- 측정체계의 어느 등급에서나 측정의 재평가에 필요한 모든 정보가 제공되어야 함: 교정성적서, 기기사용 설명서, 국가 및 국제표준, 지역규정 등

- 측정결과와 불확도를 보고할 때 정보의 양이 적은 것 보다는 많은 편이 바람직함. 다음의 정보는 꼭 포함시킬 것
  - 측정결과와 불확도 계산을 위해 사용된 방법
  - 모든 불확도 성분 열거하고, 이들의 평가 방법 철저 기술
  - 보고된 결과를 독립적으로 반복 계산할 수 있도록 데이터 분석 방법 제시
  - 분석에 사용된 모든 보정값 및 상수들과 그들의 출처 명시

불확도 보고 (2/4)

2. 특별한 지침

- 합성표준불확도의 보고

1) 측정량 Y가 어떻게 정의 되었는가에 대한 내용
2) 측정량 Y의 추정값 y와 그 합성표준불확도 $u_c(y)$.
   이 때 y 및 u_c의 **단위는 반드시 주어져야 함**.
3) 필요한 경우 상대합성표준불확도 $u_c(y)/|y|$

- **예**: 명목값이 100 g인 질량표준 m_s에 대해서 보고할 때,

1) “m_s= 100.021 47 g, u_c= 0.35 mg” (합성표준불확도)
2) “m_s= 100.021 47(35) g, 여기서 괄호 안의 숫자는 인용된 결과의 마지막 두 자릿수에 해당되는 (합성표준불확도) u_c 의 수치이다.”
3) “m_s= 100.021 47(0.000 35) g, 여기서 괄호 안의 숫자는 (합성표준불확도) u_c 를 인용된 결과의 단위로 표시한 수치이다.”
4) “m_s= (100.021 47 ± 0.00035) g, 다만 여기서 기호 ± 다음의 숫자는 u_c 의 수치이며 신뢰구간이 아니다.” : <u>사용하지 말 것</u>

불확도 보고 (3/4)

3. 확장불확도의 보고

- 확장불확도 $U=ku_c(y)$를 보고할 때 다음 내용 포함해야 한다.

1) 측정량 Y가 어떻게 정의 되었는가에 대한 내용
2) 측정결과를 $Y = y \pm U$ 로 나타내고 y 및 U의 단위를 표시
3) 필요한 경우 상대확장불확도 $U(y)/|y|$ 포함
4) 포함인자 k 값 제시 (사용자 편의를 위해 $u_c(y)$도 표시)
5) 구간 $y \pm U$ 관련된 신뢰구간과 그 값의 결정방법 제공

- <u>예: 질량표준 보고</u>

"m_s= (100.021 47 ± 0.000 70) g, 다만 여기서 ± 기호 다음의 숫자는 (확장불확도) $U=ku_c$의 값이며, 이 값은 (합성표준불확도) u_c =0.35 mg과 포함인자 k=2로부터 결정되었고, 이는 95.45 %의 신뢰수준을 갖는 것으로 추정되는 구간을 나타낸다."

불확도 보고 (4/4)

4. 공통 사항

- $u_c(y)$ 및 U의 수치 값은 일반적으로 **유효숫자 두 자리**면 충분함
- 최종결과를 보고할 때 불확도는 반올림한 값보다 올림하는 것이 적합할 경우가 종종 있다.

  예: $u_c(y)$ = 10.47 m -> 11 m,

  그러나 $u(x_i)$= 28.05 kHz -> 28 kHz
- 추정값은 그 불확도와 양립하도록 근사값 (자리수)을 결정할 것

  예: y=10.057 62 Ω, $u_c(y)$ = 27 mΩ 인 경우,

  y=10.058 Ω으로 반올림
- 피측정기기가 고객의 실험실로 되돌려질 때 발생될 수 있는 불확도나 고객의 실험실에서 다른 측정의 교정용 표준기로 사용될 때 생길 수 있는 불확도를 추정하여 포함시켜서는 안됨. 어디까지나 **연구원 (KRISS)에서 평가된 값만으로 산출되어야 함**.
- <u>운반과정</u>, <u>기계적 손실</u>, <u>시간의 경과</u>, <u>측정환경 차이</u>로 인한 불확도가 클 경우에는 불확도 보고서에 **주의사항**으로 첨부할 것.

이제는 . . .

수고하셨습니다

"주파수발생기의 측정불확도 산출",
"스톱워치 및 회전수의 측정불확도 산출" 강의와
한국표준과학연구원에서 발행한
"측정불확도 표현 지침"을 참조.

감사합니다. 끝